ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ
ΤΟΥ Κ. ΜΠΑΪΚΟΥΣΗ.

Αναλυτική Γεωμετρία (ευθεία στο Χώρο - Επίπεδα)

30) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται απ' τα σημεία $P_1(2,0,0)$, $P_2(0,-3,0)$ και $P_3(0,0,4)$

ΛΥΣΗ

3η περίπτωση:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & -3-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12(x-2)+8y-6z=0 \Rightarrow -6x+4y-3z+12=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2x+\frac{4}{3}y-z+4=0$$

31) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα $P(2,1,-1)$ και είναι κάθετο στην τομή των επιπέδων:
$(\Pi_1)\ 2x+y-z=3$ και $(\Pi_2)\ x+2y+z=2$

ΛΥΣΗ

α' τρόπος

Η τομή των 2 επιπέδων είναι μια ευθεία (ε)

Μορφής $\dfrac{x-x_1}{\alpha} = \dfrac{y-y_1}{\beta} = \dfrac{z-z_1}{\gamma}$

Το (Π_1) έχει κάθετο διάνυσμα $\vec{n}_1=(2,1,-1)$

Το (Π_2) έχει κάθετο διάνυσμα $\vec{n}_2=(1,2,1)$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon) \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Όπου, από κεφάλαιο 1ο ισχύει ότι

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3,-3,3) = (1,-1,1)$$

<u>B' τρόπος.</u>

Για $x=0$

$$\left\{\begin{array}{l} y - z = 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{4}{3} \end{array}\right\} P_1\left(0, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Για $y=0$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - z = 3 \\ x + z = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{5}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{array}\right\} P_2\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = (1,-1,1)$$

Το $P \in (\pi)$ με $\underset{\vec{n}_1 \times \vec{n}_2}{\overrightarrow{P_1P_2}} \perp (\pi)$

4η Περίπτωση

$1(x-2) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - \cancel{2} - y + \cancel{1} + z + \cancel{1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y + z = 0$

(13)

32) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται απ' την τομή των επιπέδων:
$(\Pi_1): x+2y-3z-1=0$ και είναι παράλληλο
$(\Pi_2): 2x+y-z+3=0$ στον άξονα Oz

<u>ΛΥΣΗ</u>

Προφανώς αφού το επίπεδο διέρχεται απ' την τομή των (Π_1) και (Π_2) άρα ψάχνω την εξίσωση αξονικής δέσμης:

Άρα,

$$\textcircled{1}\ \lambda(x+2y-3z-1)+\mu(2x+y-z+3)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\Pi)\ (\lambda+2\mu)x+(2\lambda+\mu)y-(3\lambda+\mu)z-\lambda+3\mu=0$$

Άρα, το (Π) έχει κάθετο διάνυσμα σε αυτό με συντεταγμένες:

$$\vec{n}(\lambda+2\mu,\ 2\lambda+\mu,\ -3\lambda-\mu)$$

Λόγω ότι $(\Pi)\parallel Oz$ το $\vec{z_0}(0,0,1)\parallel(\Pi)$

Αφού $\vec{n}\perp(\Pi) \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{z_0} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{z_0}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\lambda-\mu=0 \Rightarrow \boxed{\mu=-3\lambda} \rightarrow \textcircled{1}$

Επομένως,

$$\cancel{\lambda}(x+2y-3z-1)-3\cancel{\lambda}(2x+y-z+3)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+2y-\cancel{3z}-1-6x-3y+\cancel{3z}-9=0 \Rightarrow$$
$$(\Pi) \Rightarrow -5x-y-10=0$$

Προφανώς το z δεν είναι στην (Π) που $(\Pi)\parallel Oz$.

37) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(8,-3,1)$, $P_2(4,7,2)$ όπου είναι κάθετο στο $(\Pi_1): 3x+y+2z-20=0$

ΛΥΣΗ

2η Περίπτωση:

Από την (Π_1) προκύπτει το κάθετο διάνυσμα σε αυτήν $\vec{n}(3,1,2) \parallel \overrightarrow{P_1P_2}(-4,10,1)$

Άρα,

$$(\Pi): \begin{vmatrix} x-8 & y+3 & z-1 \\ 4-8 & 7+3 & 2-1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ -4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)(20-1)-(y-1)(-8-3)+(z-2)(-4-30)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19(x-3)+11(y-1)-34(z-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19x+11y-34z\cancel{-57-11+68}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19x+11y-34z=0$$

39) ΝΔΟ το επίπεδο

$(\pi): (t+1)^2 x + (t^2 - t + 1) y + (t^2+1) z = 0$

διέρχεται από μια σταθερή ευθεία όταν το $\underline{t}$ μεταβάλλεται

<u>ΛΥΣΗ</u>

$(t^2 + 2t + 1) x + (t^2 - t + 1) y + (t^2 + 1) z = 0 \Rightarrow$

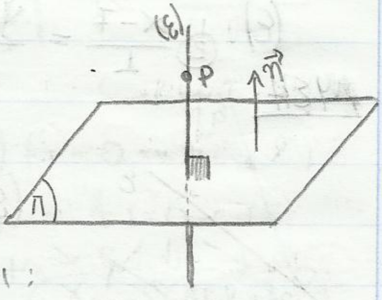
$\Rightarrow t^2 (x + y + z) + t(2x - y) + x + y + z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t^2 + 1)(x + y + z) + t(2x - y) = 0$

Μορφή Αξονικής δέσμης με τομή

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} (\varepsilon_1)$$

40) Να βρείτε τις εξισώσεις ευθείας που διέρχεται απ' το σημείο $P(1,2,1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $:(\pi)\ x + 2y - z = 0$



<u>ΛΥΣΗ</u>

$\vec{n}(1, 2, -1)$

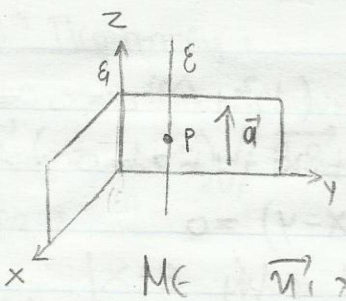
$\vec{n} \parallel \varepsilon$

Άρα οι εξισώσεις θα 'ναι οι:

$(\varepsilon)\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$

41) Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το $P(2,1,1)$ και είναι παράλληλη στα επίπεδα $(\Pi_1)\ 2x-y+1=0$ και $(\Pi_2): y-1=0$

ΛΥΣΗ



$\vec{u}_1 \perp (\Pi_1) \Rightarrow \vec{u}_1(2,-1,0)$

$\vec{u}_2 \perp (\Pi_2) \Rightarrow \vec{u}_2(0,1,0)$

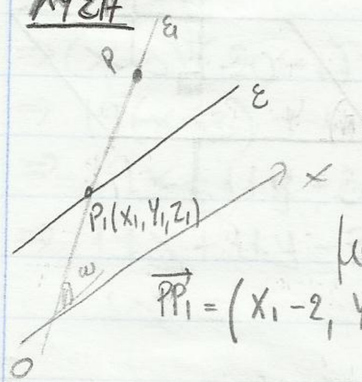
Το $\vec{a} // (\varepsilon)$ άρα $\vec{a} // \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

Με $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2)$

Άρα, $(\varepsilon): \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{2}$

42) Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας που διέρχονται από το $P(2,-3,-1)$ τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-5}{2}$ ③ και με τον Ox σχηματίζει γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad.

ΛΥΣΗ



$(\varepsilon_1): \dfrac{x-2}{a} = \dfrac{y+3}{\beta} = \dfrac{z+1}{\gamma}$

με $\vec{u}(a,\beta,\gamma)$ και $\vec{a} // \vec{Ox}$ $= (1,0,0)$

$\vec{PP_1} = (x_1-2,\ y_1+3,\ z_1+1)$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{n}}{\sqrt{a^2+\beta^2+\gamma^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 4a^2 = 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \Rightarrow$

με $a>0$ $\Rightarrow a^2 = 3(\beta^2+\gamma^2)$ ①

Το P_1 επαλήθευει την (ε_1)

$$\frac{x_1-2}{\alpha}=\frac{y_1+3}{\beta}=\frac{z_1+1}{\gamma} \quad (2)$$

Θεωρώ ότι $(2)=t_1$ και $(3)=t_2$:

$$(2)\quad \left.\begin{aligned}\frac{x_1-2}{\alpha}&=t_1\\ \frac{y_1+3}{\beta}&=t_1\\ \frac{z_1+1}{\gamma}&=t_1\end{aligned}\right\}\begin{aligned}x_1&=\alpha t_1+2\\ y_1&=\beta t_1-3\\ z_1&=\gamma t_1-1\end{aligned}$$

$$(3)\quad \left.\begin{aligned}\frac{x_1-7}{1}&=t_2\\ \frac{y_1-3}{2}&=t_2\\ \frac{z_1-5}{2}&=t_2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}x_1&=t_2+7\\ y_1&=2t_2+3\\ z_1&=2t_2+5\end{aligned} \quad \begin{aligned}y_1-3&=z_1-5\\ \boxed{y_1}&\boxed{=z_1-2}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\beta t_1-3=\gamma t_1-1-2 \Rightarrow (\beta-\gamma)t_1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta-\gamma=0 \text{ ή } t_1=0 \Rightarrow \beta=\gamma \text{ ή } t_1=0$$

$$x_1=2 \quad y_1=-3 \quad z_1=-1$$

$$\beta=\gamma \Rightarrow (1)\ \alpha^2=\gamma^2\cdot 6 \Rightarrow \alpha=\sqrt{6}\gamma$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{6}\gamma}=\frac{y+3}{\gamma}=\frac{z+1}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{x-2}{\sqrt{6}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{1}}$$

43) Να βρεθεί την απόσταση του σημείου $P(1,1,-2)$ από την $(\varepsilon_1): \begin{cases} 2x-4z-3=0, \\ y-2z+5=0 \end{cases}$

Λύση

α' τρόπος Θέτω για $z=0$

$P_1\left(\frac{3}{5}, -5, 0\right)$

Θέτω για $z=1$

$P_2\left(\frac{7}{2}, -3, 1\right)$

$(\varepsilon) \parallel \overrightarrow{P_1P_2}(2,2,1)$

$$(\varepsilon): \frac{x-\frac{3}{5}}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$$

β' τρόπος

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{a}$ ①

με $\vec{n}_1(2,0,-4)$

και $\vec{n}_2(0,1,-2)$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0 \Rightarrow$$

4η Περίπτωση $\Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (4,4,2) = (2,2,1)$

άρα $(\pi): 2(x-1) + 2(y-1) + (z+2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 2y + z - 2 = 0$ ①

αλλά $\begin{cases} 2x - 4z - 3 = 0 \Rightarrow x = 2z + \frac{3}{2} & ② \\ y - 2z + 5 = 0 \Rightarrow y = 2z + 5 & ③ \end{cases}$

Άρα ① προκύπτει ότι:

$z = 1$

Μετά σε ②, ③ έχουμε

$x = \frac{7}{2}, \quad y = -3$

$$d(P,(\varepsilon)) = |\overrightarrow{PP_1}| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-1\right)^2 + (-3-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{19{,}5} \text{ μον.}$$

44) ΝΔΟ η $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$ // $x-2y+z-5=0$

ΛΥΣΗ

Το $\vec{\alpha}(2,3,4)$ //(ε)

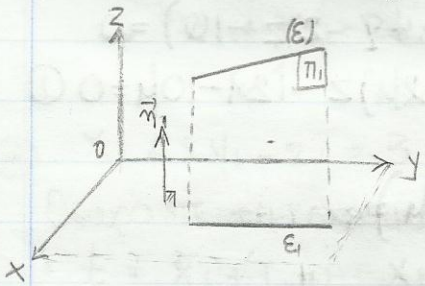
Το $\vec{n}(1,-2,1)$ //(Π)

Αρκεί νδο $\vec{a}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (2,3,4)(1,-2,1)=0$ ισχύει.

45) Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων που προβάλλουν την ευθεία:

$$(\varepsilon):\begin{cases}2x-3y+4z-12=0\\ x+4y-2z-10=0\end{cases}$$ στα επίπεδα συντεταγμένων

ΛΥΣΗ



α' τρόπος

• Προσδιορίζουμε τα σημεία P_1 και P_2.

▷ Για $y=0$, επιλύοντας το σύστημα είναι $P_1(8,0,-1)$

▷ Για $y=1$, επιλύοντας το σύστημα είναι $P_2\left(\frac{27}{3},1,\frac{3}{8}\right)$ ή με $\left.\begin{matrix}\vec{a}_1=(2,-3,4)\\ \vec{a}_2=(1,4,-2)\end{matrix}\right\}\ \vec{a}_1\times\vec{a}_2=(-10,8,11)$

Άρα,

$$(\varepsilon):\ \frac{x-8}{\frac{27}{3}-8}=\frac{y}{1-0}=\frac{z+1}{\frac{3}{8}+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varepsilon):\ \frac{x-8}{-\frac{5}{4}}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{\frac{11}{8}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varepsilon):\ \frac{x-8}{-10}=\frac{y}{8}=\frac{z+1}{11}$$

Το $\vec{n}_1 \perp (\varepsilon_1) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0,0,1)$

$$(\Pi_1): \begin{vmatrix} x-8 & y-0 & z+1 \\ -10 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x-8) - y(-10) + \cancel{(z+1)\cdot 0}^{\,0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 64 + 10y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 10y - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 5y - 32 = 0$$

β' τρόπος

Αξονική Δέσμη

$$\lambda(2x-3y+4z-12) + \mu(x+4y-2z-10) = 0$$

$$(2\lambda+\mu)x + (4\mu-3\lambda)y + (4\lambda-2\mu)z - 12\lambda - 10\mu = 0 \quad (1)$$

Το $(\Pi_1) \perp Oxy: z=0$

$$\vec{n} = (2\lambda+\mu,\ 4\mu-3\lambda,\ 4\lambda-2\mu)$$

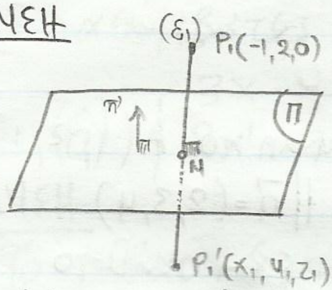
και $\vec{n}_1 = (0,0,1)$

Άρα $\vec{n} \perp \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n}_1 = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 2\lambda$

$$(1) \Rightarrow 4x + 5y - 32 = 0$$

50) Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $P_1(-1,2,0)$ ως προς το $(\Pi): x+2y-z+1=0$

<u>ΛΥΣΗ</u>



$P_1(-1,2,0)\ ,\ \vec{n}=(1,2,-1)$

$(\varepsilon_1): \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$

$$d(P_1,\Pi)=\frac{|-1+4+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt6}=\frac{4\sqrt6}{6}=\frac{2\sqrt6}{3}$$

$$d(P_1',\Pi)=\frac{|x_1+2y_1-z_1+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt6}\Rightarrow |x_1+2y_1-z_1+1|=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+2y_1-z_1+1=\pm4 \quad \text{και} \quad \frac{x_1+1}{1}=\frac{y_1-2}{2}=\frac{z_1}{-1} \ (1)$$

(2) $x_1+2y_1-z_1=3\ ,\ x_1+2y_1-z_1=-5$ (3)

Θεωρούμε τη σχέση (1) $=t$

- $t=x_1+1 \Rightarrow x_1=t-1$
- $t=\dfrac{y_1-2}{2}\Rightarrow y_1=2t+2$
- $t=\dfrac{-z_1}{1}\Rightarrow z_1=-t$

(4)

(4) → (2), $t-1+2(2t+2)+t=3\Rightarrow$
$\Rightarrow t-1+4t+4+t-3=0\Rightarrow$
$\Rightarrow 6t=0\Rightarrow \boxed{t=0}$

(4) → $x_1=-1$, $y_1=2$, $z_1=0$ P_1'

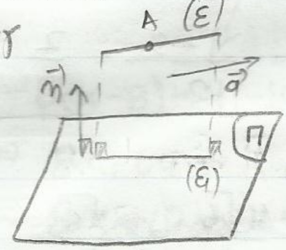
(4) → (3), $t-1+2(2t+2)+t=-5\Rightarrow$
$\Rightarrow t-1+4t+4+t+5=0\Rightarrow$
$\Rightarrow 6t=-8\Rightarrow \boxed{t=-\frac{4}{3}}$

(4) → $x_1=1$, $y_1=-2$, $z_1=0$ P_1

51) Να βρεθούν οι εξ. προβολής της ευθείας (ε): $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$ στο επίπεδο
(Π): $x+2y+5z-1=0$

ΛΥΣΗ

α' τρόπος



Η (ε) διέρχεται απ' το $A(1,2,1)$ και είναι $\parallel \vec{a}=(2,3,4)$ αλλά το (Π) έχει κάθετο διάνυσμα $\vec{n}=(1,2,5)$

Θα πρέπει να βρεθεί η (ε1)

$$(\Pi_1): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x-6y+z+4=0$$

Άρα, $(\varepsilon_1) = \begin{cases} 7x-6y+z+4=0 \\ x+2y+5z-1=0 \end{cases}$

β' τρόπος Αξονική δέσμη

Η (ε) γράφεται αλλιώς

$$(\varepsilon)=\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ 4x-2z-2=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\lambda(3x-2y+1)+\mu(4x-2z-2)=0 \Rightarrow \\ &(3\lambda+4\mu)x-2\lambda y-2\mu z+\lambda-2\mu=0 \end{aligned}$$

Αλλά $(\Pi_1)\perp(\Pi)$ ή $\vec{n}=(1,2,5)\perp\vec{n}_1(3\lambda+4\mu,-2\lambda,-2\mu)$

$\vec{n}\cdot\vec{n}_1=0 \Rightarrow -\lambda-6\mu=0 \Rightarrow \lambda=-6\mu$

$$\Rightarrow (\varepsilon_1): \begin{cases} -14x+12y-2z-8=0 \\ x+2y+5z-1=0 \end{cases}$$

46) Να βρείτε την ευθεία (ε) που διέρχεται από το $P(-3,5,-9)$ και τέμνει τις 2 ασύμβατες ευθείες

$$(\varepsilon_1): \begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}, \quad (\varepsilon_2): \begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ 5x - z + 10 = 0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

- Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π_1) είναι το $\vec{n}_1 = (3, -1, 0)$
- Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π_2) είναι το $\vec{n}_2 = (2, 0, -1)$

Άρα, το $\parallel (\varepsilon_1)$ διάνυσμα θα είναι το

- $$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, 2)$$

- Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π_3) είναι το $\vec{n}_3 = (4, -1, 0)$
- Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο (π_4) είναι το $\vec{n}_4 = (5, 0, -1)$

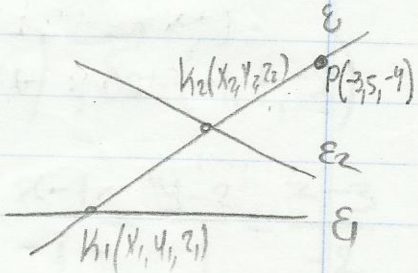
Άρα, το $\parallel (\varepsilon_2)$ διάνυσμα θα είναι το

- $$\vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 4, 5)$$

Οι (ε_1), (ε_2) ασύμβατες

Γιατί $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{4} \neq \frac{2}{5}$

για τα $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, $\vec{n}_3 \times \vec{n}_4$.



• $(\varepsilon) \to P(-3, 5, -9)$

Το $(\pi): \lambda(3x - y + 5) + \mu(2x - z - 3) = 0$

$4\lambda + 0\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Άρα, $(\pi): 2x - z - 3 = 0$

• $(\varepsilon) \to P(-3, 5, -9)$

Το $(\pi'): k(4x - y - 7) + \nu(5x - z + 10) = 0$

$-24k + 4\nu = 0 \Rightarrow \nu = 6k$

Άρα, $(\pi'): 34x - y - 6z + 53 = 0$

Άρα, η ζητούμενη ευθεία

$$(\varepsilon): \begin{cases} 2x - z - 3 = 0 \\ 34x - y - 6z + 53 = 0 \end{cases}$$

48) Δίνονται ευθείες (τεμνόμενες)

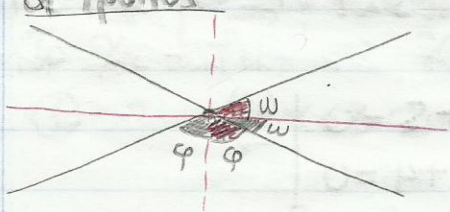
$(\varepsilon_1): \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{8} = \dfrac{z-3}{1}$ και

$(\varepsilon_2): \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-3}{3}$

Να βρείτε τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι 2 ευθείες.

<u>ΛΥΣΗ</u>

<u>α' τρόπος</u>



Η επίλυση του προβλήματος θα επελθεί από τα μοναδιαία διανύσματα

$$\vec{\delta_1} = \frac{\vec{\alpha}'}{|\vec{\alpha}'|} + \frac{\vec{\beta}'}{|\vec{\beta}'|} \quad \text{και} \quad \vec{\delta_2} = \frac{\vec{\alpha}'}{|\vec{\alpha}'|} - \frac{\vec{\beta}'}{|\vec{\beta}'|} \quad \circledast$$

Οι ε1 και ε2 προφανώς τέμνονται αφού διέρχονται απ' το $A(1,2,3)$

και $\vec{\alpha}' = (3,8,1) \parallel (\varepsilon_1)$ με $|\vec{\alpha}'| = \sqrt{74}$

$\vec{\beta}' = (4,7,3) \parallel (\varepsilon_2)$ με $|\vec{\beta}'| = \sqrt{74}$

Άρα, στην $\circledast$: $\vec{\delta_1} = (7,15,4)$, $\vec{\delta_2} = (-1,1,-2)$

Άρα, έχουμε

$(\delta_1): \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-2}{15} = \dfrac{z-3}{4}$, $(\delta_2): \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$

•) Να βρείτε το επίπεδο που περιέχει την ευθεία :

$$(\varepsilon): \begin{cases} -x+y+2z-5=0 \\ 3x+y-z+4=0 \end{cases}$$

Ενώ (π) κόβει τον xoy σε μια ευθεία $(\varepsilon_1) \perp Ox$

ΛΥΣΗ

$\vec{n_1} = (-1, 1, 2)$ και $\vec{n_2} = (3, 1, -1)$

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{x_0} & \vec{y_0} & \vec{z_0} \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 5, -4) = (3, -5, 4)$$

Για $z=0$, $\begin{cases} -x+y-5=0 \\ 3x+y+4=0 \end{cases} \overset{(\cdot 3)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 4y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{4}$ και $x = \frac{-9}{4}$

Άρα, $A\left(\frac{9}{4}, \frac{11}{4}, 0\right)$ και έτσι

$$(\varepsilon_1): \frac{x+\frac{9}{4}}{3} = \frac{y-\frac{11}{4}}{-5} = \frac{z}{4}$$

Το $(\pi) \in (\varepsilon)$ επομένως, θα ναι η αξονική δέσμη αυτού

(π): $\lambda(-x+y+2z-5) + \mu(3x+y-z+4) = 0$

$(-\lambda+3\mu)x + (\lambda+\mu)y + (2\lambda-\mu)z - 5\lambda - 4\mu = 0$ ①

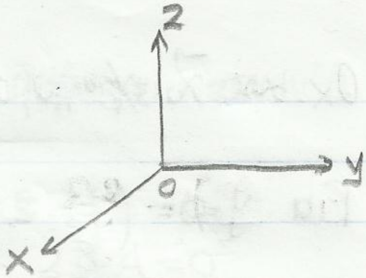
$(\varepsilon_1): \begin{cases} ① \\ z=0 \end{cases}$, $(\varepsilon_1) \perp Ox$

i) Εστω τα επιπεδα

$(\pi_1): 3x+y-z+1=0$

$(\pi_2): 4x-y+5z-3=0$

$(\pi_3): 4x-7y+z+2=0$



Να βρείτε το (π) που κόβει το yOz κατά την διχοτομο των θετικών ημιαξόνων Oy και Oz

ΛΥΣΗ

Το (π) αποτελεί την κεντρική δέσμη, άρα:

$$\lambda(3x+y-z+1)+\mu(4x-y+5z-3)+\nu(4x-7y+z+2)=0$$

$$(3\lambda+4\mu+4\nu)x+(\lambda-\mu-7\nu)y+(-\lambda+5\mu+\nu)z+$$
$$+\lambda-3\mu+2\nu=0 \quad ⊛$$

Η διχοτόμος (ε) διέρχεται απ' τα εξής σημεία $A(0,1,1)$ και $O(0,0,0)$

Αρα, $⊛ \xrightarrow{O} \lambda-3\mu+2\nu=0 \Rightarrow \nu=\frac{2}{3}\mu$

$⊛ \xrightarrow{A} \lambda+\mu-4\nu=0 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{3}\mu$

Για ⊛ θα έχουμε:

$$\frac{5}{3}3x+\frac{5}{3}y-\frac{5}{3}z+\frac{5}{3}+4x-y+3z-3+\frac{2}{3}4x-$$
$$-\frac{2}{3}7y+\frac{2}{3}z+2\frac{2}{3}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+\frac{5}{3}y-\frac{5}{3}z+4x-y+3z+\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y+$$
$$+\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{34}{3}x-4y+2z=0 \Rightarrow 34x-12y+6z=0$$

β΄ τρόπος από άσκηση (50).

$d(P_1, \Pi) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$(\varepsilon): \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+2 \\ z = -t \end{cases}$

$(\Pi): x+2y-z+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t-1)+2(2t+2)+t+1=0 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$

Άρα,

$A\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Αλλά, το

Α αποτελεί μέσο

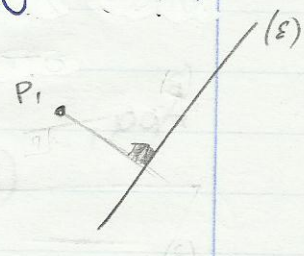
Άρα, $\frac{x_2-1}{2} = -\frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{3}$

$\frac{y_2+2}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{3}$

$\frac{z_2+0}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow z_2 = \frac{4}{3}$

•) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P_1(1,1,-2)$ απ' την ευθεία

$(\varepsilon) = \begin{cases} 2x-4z-3=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$



ΛΥΣΗ

$\vec{n_1} = (2,0,-4) = (1,0,-2)$, $\vec{n_2} = (0,1,-2)$ $\Big\}$ $\vec{n_1} \times \vec{n_2} = (2,2,1)$

Η $(\varepsilon) \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, $P \in (\pi)$ εώ $(\pi) \perp (\varepsilon)$

$(\pi): 2(x-1) + 2(y-1) + (z+2) = 0$

$(\pi): 2x + 2y + z - 2 = 0$

Έπειτα, $A \in (\pi) \cap (\varepsilon)$

$$\begin{cases} 2x+2y+z-2=0 \\ 2x-4z-3=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{7}{2}, -3, 1\right)$$

$d = |\vec{PA}| = \frac{\sqrt{125}}{2}$ όπου $\vec{PA} = \left(\frac{5}{2}, -4, 3\right)$

•) Να βρείτε τις εξισώσεις που περνούν από το $P(1,-2,3)$ και είναι $\parallel Oyz$

ΛΥΣΗ

$(\varepsilon): \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+2}{\beta} = \frac{z-3}{\gamma}$

$(\varepsilon) \parallel Oyz: x=0 \rightsquigarrow \vec{n}_1 = (1,0,0)$ κάθετο

ΔΗΛΑΔΗ $\rightsquigarrow \alpha x + \beta y + \gamma \cdot z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

Άρα,

$(\varepsilon): \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{\beta} = \frac{z-3}{\gamma}$. $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$